Température à l'intérieur de la Terre.

Cet exercice est un exemple parmi beaucoup d'autres sur les phénomènes diffusifs lorsque la grandeur qui diffuse (ici l'énergie) est produite ou absorbée par le milieu. Il aurait pu s'agir de diffusion de neutrons, ceux-ci étant absorbés par la matière, de diffusion thermique dans un conducteur siège d'un effet Joule, etc.

C'est aussi un exemple parmi beaucoup d'autres qui explore non pas un phénomène unidirectionnel, mais une diffusion à symétrie sphérique. On pourra s'amuser à le transposer en symétrie cylindrique, par exemple pour étudier le champ des températures dans une barre d'uranium radioactif.

Il en résulte que l'étude proposée ici n'a d'autre d'intérêt que d'illustrer les raisonnements spécifiques à tenir dans les situations relevant des deux remarques initiales. Du reste il s'agit du explication tout à fait fantaisiste à l'existence d'un gradient thermique interne à la terre.

La terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R = 6400$ km de conductivité thermique homogène λ. On suppose que la terre est siège de désintégrations radioactives dont la puissance volumique $\mathcal{P}_V$ est uniforme.

Question 1 :
Justifier que le régime est quasi-permanent.

L'âge de la terre est actuellement estimé à $4,5$ milliards d'années et c'est à cette échelle de temps que sa température interne varie. A l'échelle de la vie humaine, on peut donc considérer le phénomène comme stationnaire.

Question 2 :
Effectuer un bilan énergétique entre deux sphères de rayons r et $r + \mathrm{d}r$, et en déduire l'expression du vecteur densité de flux thermique, radial, noté $j(r)\,\overrightarrow{e}_r$ et de la température $T(r)$ en fonction de r, λ, R et $\mathcal{P}_V$ (la température de surface T_s est supposée connue). On tiendra compte que la température reste partout finie.

Considérons donc, pendant une durée $\mathrm{d}t$, la couche comprise entre les rayons r et $r+\mathrm{d}r$, son énergie interne est constante car on est en régime permanent ($\mathrm{d}U = 0$) ; elle ne reçoit pas de travail, car elle est incompressible ($\delta W = 0$) ; enfin elle bénéficie (algébriquement) de trois transferts thermiques :

- par le flux thermique entrant (car $j(r)$ est compté positivement dans le sens centrifuge) par la sphère de rayon r, de surface $S(r) = 4\,\pi\,r^2$; donc pendant un temps $\mathrm{d}t$, le transfert thermique est $\delta Q_1 = j(r)\,S(r)\,\mathrm{d}t$
- par le flux thermique sortant par la sphère de rayon $r + \mathrm{d}r$, de surface $S(r + \mathrm{d}r)$; donc pendant un temps $\mathrm{d}t$, le transfert thermique reçu est $\delta Q_2 = -j(r + \mathrm{d}r)\,S(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t$
- par le phénomène radioactif de puissance volumique $\mathcal{P}_V$ s'exerçant sur le volume $\mathrm{d}V = S(r)\,\mathrm{d}r$, donc $\delta Q_3 = \mathcal{P}_V\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \mathcal{P}_V\,S(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$

Appliquons le premier principe de la thermodynamique :

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta Q_3$$

$$0 = 0 + j(r)\,S(r)\,\mathrm{d}t - j(r + \mathrm{d}r)\,S(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_V\,S(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

Simplifions par $\mathrm{d}t$, réorganisons, puis effectuons un développement de Taylor au premier ordre

$$j(r + \mathrm{d}r)\,S(r + \mathrm{d}r) - j(r)\,S(r) = \mathcal{P}_V\,S(r)\,\mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[j(r)\,S(r)\right]\,\mathrm{d}r = \mathcal{P}_V\,S(r)\,\mathrm{d}r$$

Simplifions par $\mathrm{d}r$ et reportons l'expression de $S(r)$ puis simplifions

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[4\,\pi\,r^2\,j(r)\right] = 4\,\pi\,r^2\,\mathcal{P}_V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\, j(r)\right] = r^2\, \mathcal{P}_V$$

A ce stade , il est tentant mais maladroit de développer la dérivée en

$$r^2\,\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r} + 2r\, j(r) = r^2\, \mathcal{P}_V$$

car on tombe sur une équation linéaire à coefficients non constants, c'est bien plus dur que d'intégrer simplement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\, j(r)\right] = r^2\, \mathcal{P}_V$$

$$\text{en} \qquad r^2\, j(r) = \frac{r^3}{3}\,\mathcal{P}_V + A \qquad \text{avec} \qquad A = Cte$$

$$j(r) = \frac{r}{3}\,\mathcal{P}_V + \frac{A}{r^2}$$

La loi de Fourier permet ensuite d'écrire

$$-\lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{3}\,\mathcal{P}_V + \frac{A}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{r\,\mathcal{P}_V}{3\,\lambda} - \frac{A}{\lambda\, r^2}$$

$$T(r) = -\frac{r^2\,\mathcal{P}_V}{6\,\lambda} + \frac{A}{\lambda\, r} + B \qquad \text{avec} \qquad B = Cte$$

Pour $r \to 0$ la température doit rester finie, il faut donc que A soit nul sinon, il y aurait divergence[1]. Par ailleurs, pour $r = R$, la température et T_s, on en déduit la valeur de B et finalement

$$T(r) = \frac{\mathcal{P}_V}{6\,\lambda}\,(R^2 - r^2) + T_s$$

Question 3 :

Monter que $G_{th} = \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}$ ***et*** $\mathcal{P}_V$ ***sont liés. Calculer dans ce modèle la température au centre de la terre en fonction de*** T_s ***et*** G_{th}

Roulons !

$$T(r) = \frac{\mathcal{P}_V}{6\,\lambda}\,(R^2 - r^2) + T_s$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{r\,\mathcal{P}_V}{3\,\lambda}$$

(Autre méthode : on a vu plus haut

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{r\,\mathcal{P}_V}{3\,\lambda} - \frac{A}{\lambda\, r^2}$$

or $A = 0$).

En particulier en $r = R$

$$G_{th} = \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = -\frac{R\,\mathcal{P}_V}{3\,\lambda}$$

[1]Ce raisonnement est omniprésent dans tous les problèmes de symétrie sphérique ou cylindrique, dans quelque domaine de la physique que ce soit.

Le signe indique que la température croît en s'enfonçant dans la terre. On en tire $\mathcal{P}_V$ en fonction de G_{th} et l'on reporte dans l'expression de $T(r)$

$$T(r) = -\frac{G_{th}}{2\,R}\,(R^2 - r^2) + T_s$$

$$\text{d'où} \qquad T(0) = T_s - \frac{G_{th}\,R}{2} = T_s + \frac{|G_{th}|\,R}{2}$$

Question 4 :

A.N. Dans les puits de mine on constate que le gradient de température est en valeur absolue de l'ordre de 30 degrés par kilomètre, calculer la température au centre de la terre. La donnée de la température en surface elle vraiment utile ?

Avec $G_{th} = 30\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{km}^{-1} = 3\,10^{-2}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $R = 6400\,\mathrm{km} = 6,4\,10^6\,\mathrm{m}$, on a

$$T(0) - T_s = 96\,000\,\mathrm{K}$$

dès lors T_s de l'ordre de 300 K est parfaitement négligeable.

Le modèle actuellement admis est une terre non homogène avec, en très gros, de la surface vers le centre : une croûte, où il y a certes un peu de radio-activité mais sans rôle réel, un «manteau» de magma avec des mouvements de convection, un noyau de fer liquide dont le cœur se solidifie et c'est la chaleur libérée par la solidification qui est la source essentielle du flux thermique. On a bien sûr ici terriblement résumé les connaissances actuelles qu'on trouvera développées dans toute bonne encyclopédie. Comme la température au centre est estimée à 6000 K, le modèle de l'exercice est bon pour la poubelle de l'histoire.